1. Варшавский сельскохозяйственный университет, Варшава, Польша
2. Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, Чебоксары, Россия

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭРОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ НЕГГЕТ-ЭФФЕКТА

Каминьски Ян Р.[1], Малов А.[2], Максимов И.[2]

Изложена математическая модель кригинга для регионализованной переменной потенциала эрозионной стойкости (ПЭС) почвогрунтов с учетом неггет-эффекта на границах между агрофонами. Приведен вывод основных математических формул для различных случаев: полувариограммы, скачка полувариограммы на границе между агрофонами, соотношения весов, дисперсии кригинга и системы уравнений кригинга. Использование на основе полученных формул метода кригинга в сочетании с методами сетей и кубических сплайн-функций позволяет построить прогнозные карты пространственного распределения ПЭС в изолиниях с учетом неггет-эффекта. Рекомендовано применение указанного метода для определения линий рубежей при проектировании противоэрозионных технологий.

ВВЕДЕНИЕ

В качестве основной характеристики, отражающей совокупное влияние показателей почвенного и растительного покрова и хозяйственного использования земель на эрозию, может быть принята экспериментально определяемая физическая величина – потенциал эрозионной стойкости (ПЭС) почвогрунтов [1]. ПЭС – это количество энергии, затраченное на разрушение и вынос единицы массы почвенного образца водным потоком.

Во многих случаях регионализованная переменная ПЭС имеет распределение с разрывами, что характерно для территорий с различными агрофонами и наличием естественных и искусственных объектов, эрозионные свойства которых резко отличаются по сравнению с прилегающим агрофоном.

МЕТОДЫ

Для пространственного прогноза величины ПЭС можно применять метод кригинга, согласно которому оцениваемое значение ПЭС ψ_p в точке p определяется как взвешенное среднее известных наблюдений в соседних точках по формуле:

$$\psi_p = \sum_{i=1}^{k} W_i \, \psi_i , \tag{1}$$

где W_i – вес i-го значения ПЭС ψ_i по отношению к оцениваемой точке p из k соседних точек.

Традиционный метод кригинга предусматривает решение системы уравнений [1]:

$$\left.\begin{array}{l} W_1\gamma(\xi_{11}) + W_2\gamma(\xi_{12}) + \ldots + W_k\gamma(\xi_{1k}) + \lambda = \gamma(\xi_{1p}), \\ W_1\gamma(\xi_{12}) + W_2\gamma(\xi_{22}) + \ldots + W_k\gamma(\xi_{2k}) + \lambda = \gamma(\xi_{2p}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_1\gamma(\xi_{1k}) + W_2\gamma(\xi_{2k}) + \ldots + W_k\gamma(\xi_{kk}) + \lambda = \gamma(\xi_{kp}), \\ W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1. \end{array}\right\} \tag{2}$$

где $\gamma(\xi_{ij})$ – значение полувариограммы для расстояния ξ_{ij} между точками i и j; $\gamma(\xi_{ip})$ – значение полувариограммы для расстояния ξ_{ip} между известной точкой i и оцениваемой точкой p, λ – множитель Лагранжа.

Для оценки значения ПЭС по методу кригинга необходимо сначала рассчитать полувариограмму по результатам измерений в контрольных точках.

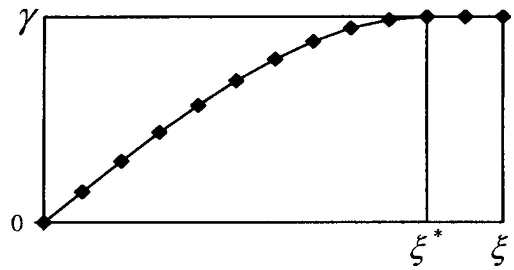

Рис. 1. Экспериментальная полувариограмма

Полувариограмма представляет собой график зависимости функции $\gamma(\xi)$ от смещения ξ и показывает, как полудисперсия разности значений ПЭС в двух точках изменяется с расстоянием между ними. Если расстояние между точками измерений величины ПЭС равно Δ, то полудисперсия может быть вычислена для расстояний, кратных Δ, по следующей формуле:

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2(n-\xi)} \sum_{i=1}^{n-\xi} (\psi_i - \psi_{i+\xi})^2, \qquad (3)$$

где ψ_i – значение ПЭС в точке i; $\psi_{i+\xi}$- значение ПЭС, взятой в точке через ξ интервалов от точки i; n – количество контрольных точек; n-ξ – количество пар сравниваемых точек.

Пример экспериментальной полувариограммы $\gamma(\xi)$, рассчитанной по формуле (3) для различных значений ξ приведен на рис. 1. По ней видно, что при нулевом расстоянии между точками измерения полудисперсия равна нулю. Расстояние ξ^*, при котором полудисперсия достигает максимума, определяет окрестность, в пределах которой величина ПЭС взаимно коррелирована. Метод кригинга применим только при $\xi \leq \xi^*$.

На практике экспериментальную полувариограмму обычно аппроксимируют близкой по виду функциональной зависимостью. Для аппроксимации непрерывных полувариограмм обычно используют сферическую, линейную с изломом, экспоненциальную и линейную модели [2].

В моделях с неггет-эффектом полувариограмма испытывает разрыв на границе раздела двух различных сред. Неггет-эффект показывает сильную изменчивость регионализованной переменной при расстояниях, меньших, чем интервал опробования.

Решая систему уравнений (2), определяют неизвестные веса W_i. После этого значение переменной ПЭС в оцениваемой точке p можно вычислить с помощью формулы (1).

Метод кригинга является оптимальным методом оценки прогнозных значений ПЭС, так как: во-первых, дисперсия и стандартная ошибка интерполируемой величины ПЭС являются минимальными; во-вторых, дисперсия и стандартная ошибка могут быть оценены априори; в-третьих, оценки интерполируемых значений ПЭС являются несмещенными по отношению к среднему арифметическому за счет наложения ограничения на весовые коэффициенты в системе (2).

Изложенная математическая модель кригинга может быть распространена и на случай неггет-эффекта. При этом важно с достаточной точностью рассчитать полувариограмму. Примем какую-либо точку O на поверхности агрофона 1, находящуюся на расстоянии a от границы с агрофоном 2, за точку отсчета (ξ_O=0). Полувариограмма величины ПЭС для агрофона 1 $\gamma_I(\xi)$ может быть описана одной из моделей непрерывных полувариограмм (рис. 2). Зададим направление оси ξ от точки O так, чтобы она пересекала границу между агрофонами при ξ=a. При этом в граничной точке полувариограмма совершает скачок на величину δ_{12} (которая также может быть определена). Полувариограмма будет иметь вид, изображенный на рис. 2.

Тогда полувариограмма на рис. 2 может быть описана формулой

$$y(\xi)=\begin{cases}\gamma_1(\xi),\xi<a,\\ \gamma_1(a)+\delta_{12}+\gamma_2(\xi-a),\xi\ge a,\end{cases} \tag{4}$$

где $\gamma_2(\xi - a)$ – полувариограмма агрофона 2.

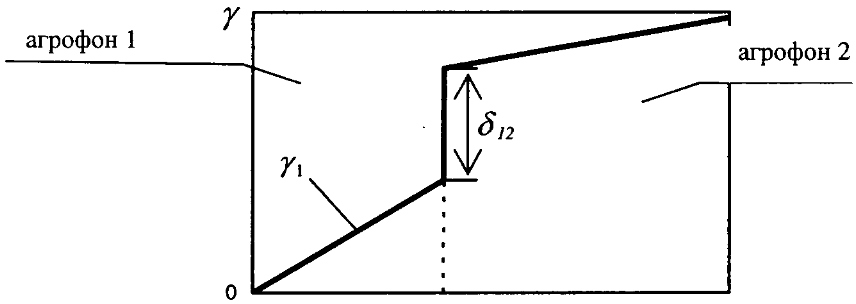

Рис. 2. Полувариограмма с неггет-эффектом на границе агрофонов.

При $\xi>a$ влияние точки O на точки агрофона 2 может быть утрачено, и полувариограмма принимает постоянное значение. В этом случае полувариограмма может быть описана формулой:

$$y(\xi)=\begin{cases}\gamma_1(\xi),\xi<a,\\ \gamma_1(a)+\delta_{12},\xi\ge a.\end{cases} \tag{5}$$

Величину скачка полувариограммы δ_{12} можно рассчитать по формуле:

$$\delta_{12}=\frac{(\overline{\psi_1}-\overline{\psi_2})^2}{2}, \tag{6}$$

где $\overline{\psi_1}=\sum_{i=1}^{n}\psi_{i1}$ и $\overline{\psi_2}=\sum_{i=1}^{n}\psi_{i2}$ - средние арифметические значения ПЭС на агрофонах 1 и 2 соответственно, n – количество точек измерения ПЭС на границе между агрофонами 1 и 2; i – номер точки измерения ($i=\overline{1,n}$); ψ_{i1} и ψ_{i2} – значения ПЭС в граничной точке i на агрофонах 1 и 2 соответственно.

Согласно теории метода кригинга [3], среднее значение ошибки оценки прогнозируемой величины должно быть равно нулю. В этом случае условие, которому должны отвечать веса W_i для однородного агрофона записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{k}W_i=1. \tag{7}$$

В случае оценки величины ПЭС в какой-либо точке агрофона 2 исключительно по k точкам измерений на агрофоне 1 на основе полувариограммы (4) условие для весов W_i представится в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{k}W_i=\frac{\overline{\psi_2}}{\overline{\psi_1}}. \tag{8}$$

Если же оценивать величину ПЭС в какой-либо точке агрофона 2 по значениям k_1 точек измерений на агрофоне 1 и k_2 точек измерений на агрофоне 2 условие для весов W_i представится в следующем виде:

$$\frac{\overline{\psi_1}}{\overline{\psi_2}}\sum_{i=1}^{k_1}W_{1i}+\sum_{i=1}^{k_2}W_{2i}=1. \tag{9}$$

При рассмотрении случая количества m соседствующих агрофонов оценка величины ПЭС в какой-либо точке агрофона q по значениям k_1, k_2, ... , k_m точек измерений на соответствующих агрофонах условие для весов W_i представится в следующем виде:

$$\frac{\overline{\psi_1}}{\overline{\psi_q}}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \frac{\overline{\psi_2}}{\overline{\psi_q}}\sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} + \ldots + \frac{\overline{\psi_m}}{\overline{\psi_q}}\sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} = 1. \quad (10)$$

Скачок полувариограммы на границе агрофонов j и q ($j = \overline{1,m}$, $j \neq q$) δ_{jq} можно рассчитать по формуле:

$$\delta_{jq} = \frac{(\overline{\psi_j} - \overline{\psi_q})^2}{2}. \quad (11)$$

Введем в формулы (8) и (9) коэффициент

$$\beta_{12} = \frac{\overline{\psi_1}}{\overline{\psi_2}}, \quad (12)$$

а в формулу (11) – коэффициенты

$$\beta_{jq} = \frac{\overline{\psi_j}}{\overline{\psi_q}}, \quad (13)$$

где $j = \overline{1,m}$, $j \neq q$.

Тогда формулы (8), (9), (10) примут соответственно следующий вид:

$$\beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i} = 1, \quad (14)$$

$$\beta_{12}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} = 1, \quad (15)$$

$$\beta_{1q}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \beta_{2q}\sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} + \ldots + \beta_{mq}\sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} = 1. \quad (16)$$

Дисперсия оценки среднего значения величины ПЭС стационарного агрофона представится формулой:

$$D(\overline{\psi} - \psi^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{\psi} - \psi^*)^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}((\overline{\psi} - \psi_j) - (\psi^* - \psi_j))^2}{n}, \quad (17)$$

где $\psi^* = \sum_{i=1}^{k} W_i \psi_i$ – оценка среднего значения величины ПЭС стационарного агрофона по k точкам измерений на данном агрофоне. При этом $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Следовательно,

$$D(\overline{\psi} - \psi^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n}((\overline{\psi} - \psi_j) - \sum_{i=1}^{k} W_i(\psi_i - \psi_j))^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{\psi}-\psi_j)^2 - 2\sum_{i=1}^{k}W_i\sum_{j=1}^{n}(\overline{\psi}-\psi_j)(\psi_i-\psi_j) + (\sum_{i=1}^{k}W_i\sum_{j=1}^{n}(\psi_i-\psi_j))^2}{n}. \quad (18)$$

В результате получается формула дисперсии оценки ПЭС, аналогичная формуле Матерона [3]:

$$D(\overline{\psi}-\psi^*) = D_{\overline{\psi}} - 2\sum_{i=1}^{k}W_iK_{\overline{\psi}\psi_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}W_iW_jK_{ij}\ , \quad (19)$$

где $D_{\overline{\psi}}$ – дисперсия ПЭС относительно ее среднего значения; $K_{\overline{\psi}\psi_i}$ – ковариация среднего значения $\overline{\psi}$ и значения ψ_i; K_{ij} – ковариация значений ψ_i и ψ_j.

Для случая оценки величины ПЭС в какой-либо точке агрофона 2 исключительно по k точкам измерений на агрофоне 1 формула дисперсии оценки ПЭС с учетом условия (14) вычисляется следующим образом:

$$D(\overline{\psi}_2-\psi_2^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n}((\overline{\psi}_2-\psi_{2j}) - (\sum_{i=1}^{k}W_{1i}\psi_{1i}-\psi_{2j}))^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n}((\overline{\psi}_2-\psi_{2j}) - \sum_{i=1}^{k}W_{1i}(\psi_{1i}-\beta_{12}\psi_{2j}))^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n}((\overline{\psi}_2-\psi_{2j}) - \beta_{12}\sum_{i=1}^{k}W_{1i}(\beta_{21}\psi_{1i}-\psi_{2j}))^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n}(\overline{\psi}_2-\psi_{2j})^2 - 2\beta_{12}\sum_{i=1}^{k}W_{1i}\sum_{j=1}^{n}(\overline{\psi}_2-\psi_{2j})(\beta_{21}\psi_{1i}-\psi_{2j})}{n} +$$

$$+ \frac{(\beta_{12}\sum_{i=1}^{k}W_{1i}\sum_{j=1}^{n}(\beta_{21}\psi_{1i}-\psi_{2j}))^2}{n} \quad (20)$$

где

$$\beta_{21} = \frac{1}{\beta_{12}} = \frac{\overline{\psi}_2}{\overline{\psi}_1}. \quad (21)$$

Таким образом, получается следующая формула дисперсии оценки ПЭС на агрофоне 2 по точкам агрофона 1:

$$D(\overline{\psi}_2-\psi_2^*) = D_{\overline{\psi}_2} - 2\beta_{12}\sum_{i=1}^{k}W_{1i}K_{\overline{\psi}_2\psi_{1(2)i}} + \beta_{12}{}^2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}W_{1i}W_{1j}K_{1(2)ij}\ , \quad (22)$$

где $D_{\overline{\psi}_2}$ – дисперсия ПЭС агрофона 2 относительно ее среднего значения; $K_{\overline{\psi}_2\psi_{1(2)i}}$ – ковариация среднего значения $\overline{\psi}_2$ и значения $\beta_{21}\psi_{1i}$; $K_{1(2)i2j}$ – ковариация значений $\beta_{21}\psi_{1i}$ и $\beta_{21}\psi_{1j}$.

Из условия минимума дисперсии оценки ПЭС (с учетом условия несмещенности оценки (14)) следует:

$$\frac{\partial D(\overline{\psi}_2 - \psi_2^*)}{\partial W_{1i}} - \lambda \frac{\partial(\beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i} - 1)}{\partial W_{1i}} = 0, \tag{23}$$

где λ – множитель Лагранжа.

После дифференцирования выражения (23) получается система уравнений кригинга для данного случая следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{12}\sum_{j=1}^{k} W_{1j} K_{1(2)ij} - \lambda = K_{\overline{\psi}_2 \psi_{1(2)i}}, \\ &\beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

При подстановке уравнений системы (24) в формулу дисперсии оценки ПЭС (22) получается формула:

$$D_K(\overline{\psi}_2 - \psi_2^*) = D_{\overline{\psi}_2} - \beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i} K_{\overline{\psi}_2 \psi_{1(2)i}} + \lambda = \beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i}(D_{\overline{\psi}_2} - K_{\overline{\psi}_2 \psi_{1(2)i}}) + \lambda. \tag{25}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как полувариограмма $\gamma(\xi_{ip})$ представляет собой в данном случае разность дисперсии $D_{\overline{\psi}_2}$ и ковариации $K_{\overline{\psi}_2 \psi_{1(2)i}}$ [3], то получается формула минимальной дисперсии оценки (дисперсии кригинга) при оценке ПЭС на агрофоне 2 только по точкам агрофона 1:

$$D_K(\overline{\psi}_2 - \psi_2^*) = \beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i}\gamma(\xi_{ip}) + \lambda. \tag{26}$$

Также выполнив переход к полувариограммам в системе (24), можно получить для случая оценки ПЭС на агрофоне 2 только по точкам агрофона 1 систему уравнений кригинга:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{12}\sum_{j=1}^{k} W_{1j}\gamma(\xi_{ij}) + \lambda = \gamma(\xi_{ip}), \\ &\beta_{12}\sum_{i=1}^{k} W_{1i} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Аналогичным образом выводится формула дисперсии кригинга при оценке ПЭС в точке агрофона 2 по значениям k_1 точек измерений на агрофоне 1 и k_2 точек измерений на агрофоне 2:

$$D_K(\overline{\psi}_2 - \psi_2^*) = \beta_{12}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i}\gamma(\xi_{ip}) + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i}\gamma(\xi_{ip}) + \lambda. \tag{28}$$

Система уравнений кригинга в этом случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{12}\sum_{j=1}^{k} W_{1j}\gamma(\xi_{ij}) + \sum_{j=1}^{k_2} W_{2i}\gamma(\xi_{ij}) + \lambda = \gamma(\xi_{ip}), \\ &\beta_{12}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

При оценке величины ПЭС в точке агрофона q по значениям k_1, k_2, … , k_m точек измерений на соответствующих m агрофонах формула дисперсии кригинга представится в следующем виде:

$$D_K(\overline{\psi}_q - \psi_q^*) = \beta_{1q}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i}\gamma(\xi_{ip}) + \beta_{2q}\sum_{i=1}^{k_2} W_{2i}\gamma(\xi_{ip}) + \ldots + \beta_{mq}\sum_{i=1}^{k_m} W_{mi}\gamma(\xi_{ip}) + \lambda . \qquad (30)$$

Система уравнений кригинга в данном общем случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{1q}\sum_{j=1}^{k_1} W_{1j}\gamma(\xi_{ij}) + \beta_{2q}\sum_{j=1}^{k_2} W_{2j}\gamma(\xi_{ij}) + \ldots + \beta_{mq}\sum_{j=1}^{k_m} W_{mj}\gamma(\xi_{ij}) + \lambda = \gamma(\xi_{ip}), \\ &\beta_{1q}\sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \beta_{2q}\sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} + \ldots + \beta_{mq}\sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

ВЫВОДЫ

Как показали расчеты, использование выведенных формул несколько снижает точность оценки ПЭС, что объясняется различием эрозионных свойств соседствующих агрофонов. Тем не менее, они могут быть применены в случаях недостаточного количества экспериментальных точек ПЭС, неудобства выполнения измерений в пределах одного и того же агрофона, малых размеров агрофона.

Используя на основе полученных формул метод кригинга в сочетании с методами сетей и кубических сплайн-функций, можно построить прогнозные карты пространственного распределения ПЭС в изолиниях с учетом неггет-эффекта. Указанный метод можно применять для определения линий рубежей при проектировании противоэрозионных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малов А. А. Разработка математических моделей прогноза эрозионных процессов и проектирование противоэрозионных технологий на склоновых землях: Дисс. … к. т. н. – Чебоксары, 2000. – 176 с.

2. Дэвис Дж. С. Статистический анализ данных в геологии. Пер. с англ. В 2 кн. Пер. В.А. Голубевой; Под ред. Д.А. Родионова. Кн. 1. – М.: Недра, 1990. – 319 с; Кн. 2. – М.: Недра, 1990. – 427 с.

3. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. – М.: Мир, 1968. – 408с.